Prof.Dr.S.Neuber (em.)

Aufgaben zu einfachen Techniken der Differentiationen

(1) (*Summenregel*): $(u \pm v)' = u' \pm v'$,

(2) (*Produktregel*): $(uv)' = u'v + uv'$.

(3) (*Quotientenregel*): $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

(4) $(cf(x))' = cf'(x)$

(5) $(x^\alpha) = \alpha\, x^{\alpha - 1}$ $, \alpha\ reell$

(6) Sei $x = \varphi(y)$ die Umkehrfunktion von $y = f(x)$.

Dann gilt: $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

(7) (Kettenregel): Sei $y = f(x) = g(u(x))$ (verkettete Funktion; u innere, g äußere F.).
Dann gilt: $f'(x) = g'(u(x))u'(x)$; kurz: Äußere mal innere Ableitung.

Differenzieren Sie:

1. y = $x^2 + xe^x - \sqrt{x} + \frac{x}{1-x}$

<u>Lösung:</u> $y' = 2x + e^x(1 + e^x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{(1-x)^2}$

<u>Kommentierte Lösung:</u> $y' = (x^2)' + (xe^x)' - (\sqrt{x})' + \left(\frac{x}{1-x}\right)'$ nach (1),

$(x^2)' = 2x, nach$ (5)

$(xe^x)' = x'e^x + x(e^x)' = 1e^x + xe^x = e^x(1+x), nach$ (2)

$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = (\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, nach$ (5)

$\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x'(1-x) - x(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1 - x - x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$, $nach(3)$

Zusammengefasst: $y' = 2x + e^x(1 + e^x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{(1-x)^2}$

2. $y = \sin(x)\cos(x)$

<u>Lösung:</u> $y' = \cos(2x)$

Kommentierte Lösung:

$$y' = (\sin x)'\cos x + \sin x(\cos x)'$$

Produktregel: $y' = \cos x \cos x + \sin x(-\sin x)$

$$y' = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

Ein anderer Weg: sin(2x)=2sinxcosx $\Rightarrow y = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

Kettenregel: innere Funktion $z = u(x) = 2x$, äußere F. g(z)=sin(z)

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2}(\sin z)'(2x)' = \frac{1}{2}\cos(2x) \bullet 2 = \cos(2x)$$

3. Für $x \neq +k\pi \quad k\ ganze\ Zahl\ \ gilt: y = \frac{sinx}{cosx}$. Bilden Sie y' !

Lösung: $y' = \frac{1}{cos^2 x} = 1 + tan^2 x$

Kommentierte Lösung: